Beweis, daß die Auflösung des Leibnitzischen Problems nur statt findet, wenn das gegebene Dreyeck gleichschenklich ist.

1. Die bereits gegebene Auflösung scheint immer mögliche Größen zu enthalten, da $\sqrt{(r^4-4A^2)}$ immer möglich ist. Denn da r die Hypotenuse des rechtwinklichten Δ dog, und A dessen Inhalt ist, so ist $r^2 > 2A$; folglich $r^4 > 4A^2$. Erwägt man aber die Nenner von n und m, wodurch r bestimmt wird, so sind sie beyde $= 0$. Denn da $\frac{ac\sin\gamma}{2} = 4A$, so ist $ac\sin\gamma = 8A$, und $ac\sin\gamma\sin\beta = \ldots$ Nenner von $n = 0$. Das nämliche gilt vom Nenner von m. Wollen daher, weil es unmöglich ist, n und m nicht $= \infty$ setzen, so muß auch die Zähler $= 0$ setzen. Dadurch würde zwar weder n noch m bestimmt werden, aber man könnte doch daraus abnehmen, daß sie bestimmbar sind, indem $\frac{0}{0}$ jede mögliche Größe denotiren. Setzt man wirklich $Ac\sin\gamma + 4Ab\sin\beta - abc\sin\beta\sin\gamma = 0$, und $ac\sin\gamma = 8A$, so verwandelt sich gedachter Nenner in $Ac\sin\gamma - 4Ab\sin\beta$. Daraus wird $c\sin\gamma = 4b\sin\beta$, welches unmöglich ist, da $c\sin\gamma = b\sin\beta$. Es ist daher schlechterdings unmöglich das gegebene Dreyeck in 3 Trapezien und einem Dreyeck, die sich gleich seyn sollen, zu theilen.

Ändern wir nun die Theilung auf die Weise, so daß das Dreyeck in 2 Dreyecke und 2 Trapezien zerlegt werde.

Es giebt das Δ BeD, (wenn wir wie vorige Auflösung verfahren) $t = \frac{bc(b-m)\sin\alpha - 4Ab}{b(b-m)\sin\alpha}$

das Trapezium geCB giebt

$t = \frac{4A(b-2m)}{a(b-m)\sin\gamma}$. Dadurch

$m = \frac{4Ab\sin\alpha - 4Aa\sin\gamma}{ac\sin\alpha\sin\gamma - 8A\sin\alpha}$. Der Nenner ist abermals $= 0$. Setzt man daher auch den Zähler $= 0$, so giebt das $b\sin\alpha = a\sin\gamma$, welches die Eigenschaft aller Dreyecke ist, wodurch also m zwar nicht bestimmt wird, aber doch angezeigt wird, daß die Auflösung nichts unmögliches enthält, und bestimmbar ist. Bestimmen wir daher $r = b - m$.

so ist $r = \frac{abc\sin\alpha\sin\gamma - 8Ab\sin\alpha - 4Ab\sin\alpha + 4Aa\sin\gamma}{a\sin\alpha\sin\gamma - 8A\sin\alpha}$

Der Nenner ist hier wieder natürlich $= 0$. Setzt man den Zähler ebenfalls $= 0$ und $ac\sin\gamma = 8A$, so verwandelt sich derselbe in

$4Aa\sin\gamma$

$b^2 - \frac{3}{2}b + 2 -$

$m^2 - 2m = \frac{-b}{2}$

$m = 1 \pm \sqrt{2 - \frac{b}{2}}$

$$\frac{ab\sin\beta - an\sin\beta - A}{b\sin\beta - n\sin\beta} -$$

$$\frac{7A - an\sin\beta}{c(b-n)\sin\beta} = \frac{4Ab - 8An}{c(b-n)\sin\gamma}$$

$$7Acb\sin\gamma - acn\sin\beta\sin\gamma = 4Ab\sin\beta - 8An\sin\beta$$

$$\frac{7Acb\sin\gamma - 4Ab\sin\beta}{ac\sin\beta\sin\gamma - 8A\sin\beta} = n$$

$$b^2c\sin\alpha - b^2t\sin\alpha - bcm\sin\alpha + btm\sin\alpha = 4Ab$$

$$7c\sin\gamma = 4\sin\beta$$

$$bc\sin\alpha - bt\sin\alpha = \cancel{4Ab}\ 4Am \qquad \cancel{\frac{b(b-m)}{4}}$$

$$bc\sin\gamma = b\sin\beta$$

$$b^2c\sin\alpha - b^2t\sin\alpha - bcm\sin\alpha - bmt\sin\alpha\ \cancel{\ } = 4\sin\beta \qquad \frac{c(b-m)\sin\alpha - 4A}{b - m\sin\alpha} = t$$

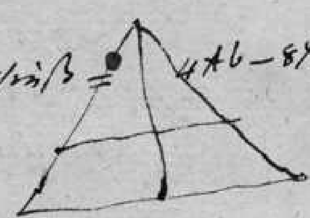
$$\frac{4Ab - 8An}{b(b-n)\sin\beta} = \frac{a(b-n)\sin\beta - A}{(b-n)\sin\beta} = \frac{4}{7} \qquad m = \frac{4Ab - 8Am}{ab\sin\beta - am\sin\beta}$$

$$4Ab - 8An = ab^2\sin\beta - abn\sin\beta - Ab$$

$b^2\sin\alpha + 2$

$$\frac{3Ab - ab^2\sin\beta}{8A - ab\sin\beta} = n \qquad m = \frac{4Ab - 8Am}{8A - am\sin\beta}$$

$$8Am - am^2\sin\beta = 4Ab - 8Am$$



~~ab − an~~ $\qquad 3Ab - \cancel{bA}$

$$\frac{ab\sin\beta - an\sin\beta - A}{b\sin\beta - n\sin\beta} = \frac{1}{2}a \quad 3Ab - 8Ab$$

$$m^2 - \frac{16Am}{a\sin\beta} = \frac{-4Ab}{a\sin\beta}$$

$$2ab\sin\beta - 2an\sin\beta - 2A = ab\sin\beta - an\sin\beta$$

$$m = \frac{8A}{a\sin\beta} \pm \frac{\sqrt{64A^2 - 4Aab\sin\beta}}{a\sin\beta}$$

$$ab\sin\beta - 2A = an\sin\beta$$

$$n = \frac{ab\sin\beta - 2A}{a\sin\beta} \qquad \frac{6A}{a\sin\beta} = \frac{\cancel{6ab\sin\beta}}{\cancel{a\sin\beta}} \qquad m = \frac{ab\sin\beta \pm \sqrt{(ab\sin\beta)^2 -}}{a\sin\beta}$$

$$cb\sin\alpha - cm\sin\alpha - 4A = bm\sin\alpha - m^2\sin\alpha \qquad \cancel{a\sin\beta \cdot 6A} \qquad \frac{ab\sin\beta}{2} + \frac{ab\sin\beta}{4}$$

$$m^2 - \frac{(b+c)m\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4A - cb\sin\alpha}{\sin\alpha} \qquad a\sin\beta \cdot b = A \qquad \frac{3ab\sin\beta}{4a\sin\beta} = m = \frac{3}{4}a$$

$$m = \frac{(b+c)\sin\alpha}{2\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2}{4}} \qquad m = \frac{8A \pm \sqrt{32A^2}}{a\sin\beta} = \frac{ab\sin\beta \pm \sqrt{2(ab\sin\beta)^2}}{a\sin\beta}$$

$$r = b - m = b \qquad m = \frac{ab\sin\beta \pm ab\sin\beta\sqrt{2}}{a\sin b} = b \pm b\sqrt{2}$$